

## MODELO PROMEDIO DE DOS REGIONES PARA EL FLUJO BIFÁSICO SÓLIDO-LÍQUIDO HORIZONTAL CON UN LECHO MOVIL

### A TWO-REGION AVERAGING MODEL FOR SOLID-LIQUID FLOW WITH A MOVING BED IN HORIZONTAL PIPES

R. Salazar-Mendoza<sup>1,3</sup>, A. Vázquez-Rodríguez<sup>2</sup>, J. R. Ramos-Alcántara<sup>1</sup>,  
E. G. Espinosa-Martínez<sup>2</sup> y G. Espinosa-Paredes<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Mecánica, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Prolongación Av. Palmira Esq. Apatzingan, Col. Palmira, Cuernavaca, Mor., C. P. 62490, México.

<sup>2</sup>Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Av. San Rafael Atlixco # 186 Col. Vicentina, México, D. F., C. P. 09340, México.

<sup>3</sup>Competencia de Producción de Hidrocarburos, Instituto Mexicano del Petróleo, Av. Periférica Norte s/n Esq. calle 35-B, Col. San Agustín del Palmar, CD. del Carmen, Camp., C. P. 24118, México.

Recibido 30 Julio 2004; Aceptado 23 Noviembre 2004

#### Resumen

Se presenta la metodología para la obtención de un modelo promedio de dos regiones separadas, el cual se emplea para estudiar el flujo bifásico sólido-líquido en tuberías horizontales en el patrón de flujo con un lecho móvil. El modelo conceptual considera dos regiones: La región superior es un flujo de recortes completamente suspendidos y la región inferior es un lecho móvil de recortes de perforación. Para derivar el modelo se utiliza el método de promediado en volumen. El modelo consiste de las ecuaciones promedio en volumen para cada una de las regiones y el acoplamiento de dichas ecuaciones se realiza adicionando un esfuerzo interregional y un esfuerzo de pared, obtenidos de un balance de fuerzas macroscópico. El modelo unidimensional y en régimen transitorio se resolvió numéricamente. La discretización de las ecuaciones diferenciales se realizó con la técnica de diferencias finitas con un arreglo explícito hacia atrás y usando una malla de punto distribuido de 100x100 nodos. El modelo permite predecir el comportamiento del gradiente de presión en un flujo con lecho móvil como función de varios parámetros: 1) velocidad superficial, 2) fracción de recortes, 3) densidad de los recortes y 4) relación entre la altura del lecho móvil y el diámetro de la tubería. El flujo bifásico sólido-líquido se simula cuando fluye a través de una tubería de 4.135 m de longitud y 0.0508 m de diámetro. Los resultados numéricos muestran buena concordancia con datos experimentales reportados en la literatura, presentándose un error máximo de 6.8 %.

*Palabras clave:* dos fases, transporte de recortes, flujo sólido-líquido, simulación, promediado en volumen

#### Abstract

In this paper a methodology to obtain a two-region averaging model is presented. The model was applied to study a two-region two-phase flow system in horizontal pipes. The analysis considers a moving bed of drilling cuttings ( $\gamma$ -region) below of a two-phase dispersed flow ( $\omega$ -region). To derive a rigorous mathematical model in which each variable is precisely defined, the method of volume averaging was applied. This model includes the volume-averaged transport equations for both regions and coupling terms obtained from a macroscopic forces balance. In order to solve the one-dimensional, time dependent, mathematical model, a backward finite difference explicit scheme with a point-distributed grid, consisting of 100x100 nodes, was applied. The simulated physical system is a pipe of 4.135 m long and 0.0508 m in diameter. The numerical simulation allows the prediction of the behavior of the pressure gradient of a flow with a moving bed as a function of velocity, total volume fraction of cuttings, cuttings density and the relation between the height of the moving bed and the pipe diameter. The numerical results agree with experimental data on slurry flows reported in literature. The maximum relative error between simulated results and experimental data was found to be 6.8%.

*Keywords:* two-phase, cuttings transport, solid-liquid flow, modeling, volume averaging

\* Autor para la correspondencia: E-mail: [gepe@xanum.uam.mx](mailto:gepe@xanum.uam.mx)  
Tel. (55) 58044645 FAX: (55) 58044900

## 1. Introducción

En varias industrias, entre ellas la química, de la minería y la petrolera, se presenta el flujo bifásico sólido-líquido a través de tuberías horizontales. Si los sólidos son de tamaño pequeño, del orden de  $40 \mu\text{m}$  de acuerdo con Kunii y Levenspiel (1991), la floculación a menudo resulta en una estructura de asociación de partículas la cual resiste la sedimentación (Gillies y col., 1991). Estas mezclas no-Newtonianas con frecuencia presentan un esfuerzo de cedencia y se conocen como mezclas fluidizadas (“non-settling”) (Gillies y col., 1991). Un modelo de flujo homogéneo (Wallis, 1969) es apropiado para describir este tipo de mezclas. Sin embargo, debido a que las partículas de tamaño mayor a 1 mm tienden a sedimentarse en el fondo de las tuberías horizontales, se pueden observar diferentes patrones de flujo dependiendo de la velocidad superficial (Doron y Barnea, 1993).

Relacionado con lo anterior Doron y Barnea (1996) definen tres patrones de flujo principales para el flujo bifásico sólido-líquido: a) flujo completamente suspendido, b) flujo con lecho móvil y c) flujo con un lecho fijo. Para los patrones de flujo b) y c) un modelo de flujo homogéneo es inapropiado. En el flujo bifásico sólido-líquido, el parámetro más importante es el gradiente de presión ya que su comportamiento como función de la velocidad superficial es sustancialmente diferente del comportamiento en un flujo monofásico.

Datos experimentales del comportamiento del gradiente de presión en sistemas bifásicos sólido-líquido en tuberías horizontales han sido reportados en varios trabajos (Durand, 1953; Zandi y Govatos, 1967; Babcock, 1971; Carleton y col., 1978; Chhabra y Richardson, 1983; Noda y col., 1984, Doron y col.,

1987; Doron y Barnea, 1993; Doron y Barnea, 1995; Doron y col., 1997). La predicción de la caída de presión y los patrones de flujo es un problema muy complejo (Doron y col., 1987). Las dos aproximaciones principales que se han usado son: (1) correlaciones de datos empíricos, usando posiblemente un razonamiento semi-teórico (por ejemplo: Newitt y col., 1955; Zandi y Govatos, 1967; Turian y Yuan, 1977) y (2) desarrollos de aproximaciones teóricas basadas en una modelación fenomenológica, tal como los modelos de dos capas (Wilson, 1976, 1988; Televantos y col., 1979; Doron y col., 1987; Gavignet y Sobey, 1989; Gillies y col., 1991; Martins y Santana, 1992; Kamp y Rivero, 1999), los modelos de tres capas (Doron y Barnea, 1993; Nguyen y Rahman, 1996, 1998; Doron y col., 1997; Cho y col., 2000), y los modelos de tres segmentos (Cho y col., 2002).

No obstante, la principal limitación de los modelos teóricos existentes es su inhabilidad para predecir, de manera suficientemente exacta, la existencia de los patrones de flujo bifásico sólido-líquido, por ejemplo el flujo con un lecho fijo a bajas velocidades, mientras que las correlaciones tienen un intervalo limitado de aplicabilidad. Por otro lado, en la industria petrolera, la perforación horizontal se usa para explotar yacimientos que exhiben zonas productoras delgadas, para resolver problemas de conificación de agua y gas, para obtener una mayor área de drene y para maximizar el potencial productivo en yacimientos naturalmente fracturados (Cho y col., 2000). Sin embargo, entre los problemas operacionales más importantes que enfrentan los perforadores de pozos horizontales y desviados es la formación y limpieza de lechos de recortes de perforación (Ramadan y col., 2001).

Los recortes de perforación son los fragmentos sólidos de roca que son generados por una barrena durante la perforación de un pozo (Santana y col., 1998). En este trabajo se presenta un modelo matemático, denominado modelo promedio de dos regiones, que se obtuvo usando el concepto de flujo bifásico sólido-líquido con un lecho móvil y el método de promediado en volumen (Whitaker, 1999). El método de promediado en volumen constituye una técnica que se usa para derivar ecuaciones de transporte para sistemas multifásicos y es una de las principales aproximaciones en la modelación de flujo en dos fases (Espinosa-Paredes y col. 2002). La solución numérica del modelo promedio de dos regiones unidimensional en régimen transitorio permitió evaluar el comportamiento del gradiente de presión como función de la velocidad, la fracción de volumen de recortes total y la relación entre la altura del lecho móvil y el diámetro de la tubería.

Para la discretización del modelo unidimensional se utilizó la técnica de diferencias finitas con un arreglo explícito hacia atrás con una malla de punto distribuido de 100x100 nodos. El sistema físico simulado es una tubería horizontal de 4.135 m de longitud y 0.0508 m de diámetro. Los resultados numéricos se compararon con datos experimentales de Doron y col. (1987); encontrándose una concordancia satisfactoria entre los perfiles de los datos experimentales y los resultados de las simulaciones. Análisis teórico del flujo bifásico sólido-líquido. Considérese el flujo bifásico sólido-líquido en una tubería horizontal. Si la velocidad superficial es alta, todas las partículas sólidas viajarán suspendidas en un patrón de flujo bifásico disperso completamente suspendido. Si la velocidad superficial se reduce, las partículas sólidas cuya

densidad sea más grande que el líquido que las transporta, tienden a sedimentarse y aglomerarse en el fondo de la tubería, formando un lecho móvil, arriba del cual fluye una mezcla bifásica heterogénea. Este comportamiento llevó al modelo de dos capas de Doron y col. (1987) y es el patrón de flujo que se analiza en este trabajo. Reduciendo aun más la velocidad superficial se logra que la altura del lecho móvil se incremente mientras que su velocidad disminuye. De acuerdo con el modelo de dos capas, el lecho llega a ser fijo cuando la suma de las fuerzas de arrastre actuando sobre el lecho es menor que la suma de las fuerzas de sedimentación que se oponen al movimiento del lecho. Aunque el modelo de dos capas funciona bastante bien para el flujo con un lecho móvil, éste falla en la mayoría de los casos para predecir la existencia de un lecho fijo. Con el fin de resolver este inconveniente, en este trabajo, se presenta un modelo promedio de dos regiones separadas, el cual es un modelo riguroso desde el punto de vista físico y matemático, donde se trabajan dos regiones de manera separada. Además, el planteamiento del modelo es en tres dimensiones y régimen transitorio y al igual que un modelo de tres capas (Doron y Barnea, 1993) funciona bastante bien para un lecho móvil y logra predecir la existencia de un lecho fijo a velocidades superficiales bajas.

### 1.1 Modelo conceptual del flujo con un lecho móvil

Con base a la evidencia experimental y el análisis de los modelos teóricos existentes se definió el modelo conceptual del flujo con un lecho móvil el cual se muestra en la Fig. 1. El modelo consta de dos regiones separadas: la región superior se denota como *región- $\omega$*  y la región inferior se denota como *región- $\gamma$* . La

*región- $\omega$*  es un flujo bifásico disperso sólido-líquido con una concentración de recortes baja, en la cual la fase sólida que se denota como *fase- $\sigma$*  viaja dispersa en la fase líquida que se denota como *fase- $\beta$* . La *región- $\gamma$*  es un lecho de recortes móvil con una concentración de recortes alta, donde la fase líquida  $\beta$  fluye junto con la fase sólida  $\sigma$  a menor velocidad respecto a la *región- $\omega$* . La longitud característica de cada región ( $h, H_\gamma$ ) es mucho mayor que el tamaño del volumen promedio  $V$ , que a su vez es mucho mayor que el tamaño individual de las fases  $l_\beta, l_\sigma$ .

## 2. Metodología

En la Fig. 2 se muestra la metodología para la obtención del modelo promedio de dos regiones separadas para el flujo con un lecho móvil de recortes. El punto de partida para la obtención del modelo de dos regiones está en las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento locales e instantáneas (ELI's) en tres dimensiones y régimen transitorio para cada una de las fases en cada región, así como las condiciones iniciales y de frontera. Las ecuaciones de gobierno locales

instantáneas para las regiones  $\omega$  y  $\gamma$  son discutidas en (Salazar-Mendoza, 2004). Para describir el proceso de transporte de recortes de perforación horizontal ilustrado en la Fig. 1, se aplicó el método de promediado en volumen (Whitaker, 1999) con el cual se deriva una forma promedio en volumen de las ecuaciones locales instantáneas. La obtención de las ecuaciones de transporte promedio en volumen es relativamente directa cuando se satisfacen las restricciones de escala de longitud clásicas (Zanotti y Carbonell, 1984; Carbonell y Whitaker, 1984). Es importante mencionar que el modelo promedio de fases separadas (Salazar-Mendoza y col., 2004) es válido tanto para la región  $\omega$  como para la región  $\gamma$  y no tiene impuestas las restricciones de escala de longitud tradicionales del método de promediado en volumen, lo cual significa que es válido para cualquier parte del sistema ilustrado en la Fig. 1. Para poder acoplar los modelos promedio es necesario que las regiones  $\omega$  y  $\gamma$  estén representadas por un modelo equivalente, i.e. un modelo de una ecuación. El modelo promedio de una ecuación para cada una de las regiones se pueden escribir como (Salazar-Mendoza, 2004).

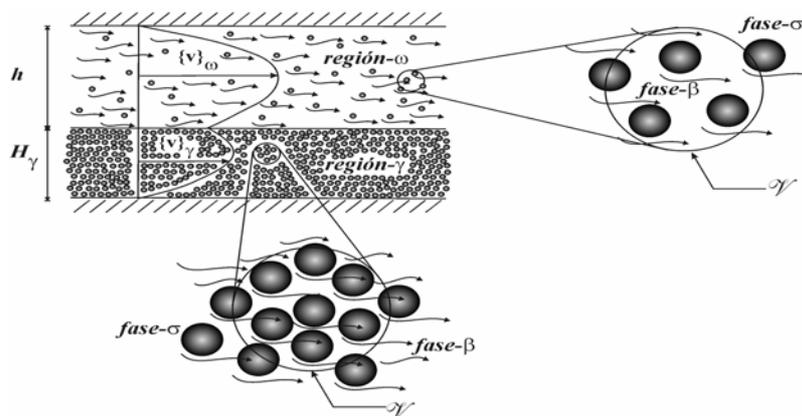


Fig. 1. Modelo conceptual de dos regiones con lecho móvil y volúmenes promedio.

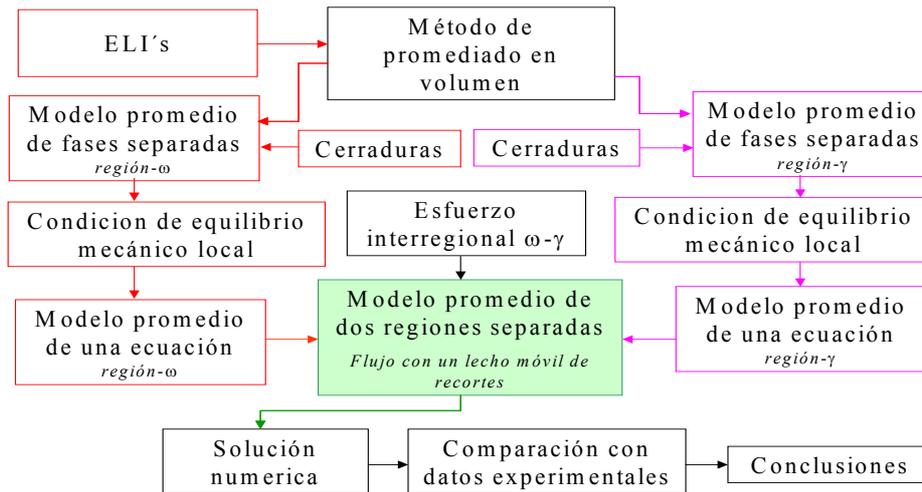


Fig. 2. Metodología para la obtención del modelo promedio de dos regiones.

### 2.1 Modelo promedio de una ecuación para la región $\omega$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{v}\}_\omega = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \{\rho\}_\omega \frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{v}\}_\omega + \{\rho\}_\omega \nabla \cdot (\{\mathbf{v}\}_\omega \{\mathbf{v}\}_\omega) \\ + \{\rho\}_\omega \nabla \cdot (\{\mathbf{v}\mathbf{v}\}_\omega)_{exc} = -\nabla \{p\}_\omega + \nabla \cdot \{\mathbf{T}\}_\omega + \{\rho\}_\omega \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 Modelo promedio de una ecuación para la región $\gamma$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{v}\}_\gamma = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \{\rho\}_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{v}\}_\gamma + \{\rho\}_\gamma \nabla \cdot (\{\mathbf{v}\}_\gamma \{\mathbf{v}\}_\gamma) \\ + \{\rho\}_\gamma (\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}_\gamma)_{exc} = -\nabla \{p\}_\gamma + \nabla \cdot \{\mathbf{T}\}_\gamma + \{\rho\}_\gamma \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4)$$

Aquí es importante anotar que la solución de las Ecs. 1 a 4 para predecir los perfiles de presión y velocidad requiere de una forma acoplada cerrada del sistema de ecuaciones, y esto se logra construyendo una la condición de salto interregional. Por otro lado, las Ecs. 1 a 4 están dadas en términos de variables promedio las cuales están en una escala de longitud mayores al radio del volumen

promedio,  $r_o$ , es decir son del mismo orden que aquellas variables que surgen de un balance macroscópico, por lo que el acoplamiento de los modelos promedio de una ecuación se realizó con la adición de términos que resultan de un balance de fuerzas macroscópico, los cuales representan la interacción entre regiones y la interacción de cada una de las regiones con las paredes (Doron y Barnea, 1993; Doron y col., 1987).

### 2.3 Modelo promedio de dos regiones

La formulación en tres dimensiones y dependiente del tiempo del modelo promedio de dos regiones separadas para el flujo con un lecho móvil de recortes, se compone por el siguiente conjunto de ecuaciones (Salazar-Mendoza, 2004):

Región- $\omega$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{v}\}_\omega = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \{\rho\}_\omega \frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{v}\}_\omega + \{\rho\}_\omega \nabla \cdot (\{\mathbf{v}\mathbf{v}\}_\omega)_{exc} = \\ -\nabla \{p\}_\omega + \nabla \cdot \{\mathbf{T}\}_\omega + \rho_\omega \mathbf{g} \\ - \left( \frac{\{\mathbf{T}\}_{\omega\omega} \cdot \mathbf{n}_{\omega\omega}}{D_{H\omega}} \right) - \left( \frac{\{\mathbf{T}\}_{\omega\gamma} \cdot \mathbf{n}_{\omega\gamma}}{D_{H\omega\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Región- $\gamma$

$$\nabla \cdot \{ \mathbf{v} \}_\gamma = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \{ \rho \}_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{v} \}_\gamma + \{ \rho \}_\gamma (\nabla \cdot \{ \mathbf{v} \mathbf{v} \}_\gamma)_{exc} = \\ - \nabla \{ p \}_\gamma + \nabla \cdot \{ \mathbf{T} \}_\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \\ - \left( \frac{\{ \mathbf{T} \}_{\gamma w} \cdot \mathbf{n}_{\gamma w}}{D_{H\gamma}} \right) + \left( \frac{\{ \mathbf{T} \}_{\omega \gamma} \cdot \mathbf{n}_{\omega \gamma}}{D_{H\gamma \omega}} \right) \end{aligned} \tag{8}$$

donde  $\{ \mathbf{T} \}_{\omega w}$  es el esfuerzo de pared en la región  $\omega$ ,  $\{ \mathbf{T} \}_{\gamma w}$  es el esfuerzo de pared en la región  $\gamma$ ,  $\{ \mathbf{T} \}_{\omega \gamma}$  es el esfuerzo interregional entre las regiones  $\omega$  y  $\gamma$ ,  $\mathbf{n}_{\omega w}$  ( $= -\mathbf{n}_{w\omega}$ ) es el vector unitario normal dirigido de la región  $\omega$  a la pared  $w$ ,  $\mathbf{n}_{\gamma w}$  ( $= -\mathbf{n}_{w\gamma}$ ) es el vector unitario normal

dirigido de la región  $\gamma$  a la pared  $w$ ,  $\mathbf{n}_{\gamma \omega}$  ( $= -\mathbf{n}_{\omega \gamma}$ ) es el vector unitario normal dirigido de la región  $\gamma$  a la región  $\omega$ . La Fig. 3 muestra los vectores unitarios del modelo de dos regiones. Además  $D_{H\omega}$  es el diámetro hidráulico de la región  $\omega$ ,  $D_{H\gamma}$  es el diámetro hidráulico de la región  $\gamma$ ,  $D_{H\omega\gamma}$  es el diámetro hidráulico interregional en la ecuación de la región  $\omega$ , y  $D_{H\gamma\omega}$  es el diámetro hidráulico interregional en la ecuación de la región  $\gamma$ . El modelo se complementa con las siguientes condiciones iniciales (C.I.) y condiciones de frontera (C.F.):

C.I.1  $\{ \mathbf{v} \}_\omega (\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r})$  (9)

C.I.2  $\{ \mathbf{v} \}_\gamma (\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r})$  (10)

C.F.1  $\{ \mathbf{v} \}_\omega = 0$  en  $y = h$  (11)

C.F.2  $\{ \mathbf{v} \}_\gamma = 0$  en  $y = -H$  (12)

C.F.3  $\{ \mathbf{v} \}_\omega = \{ \mathbf{v} \}_\gamma$  en  $A_{\omega\gamma}$  (13)

C.F.4  $\{ p \}_\omega = \{ p \}_\gamma$  en  $A_{\omega\gamma}$  (14)

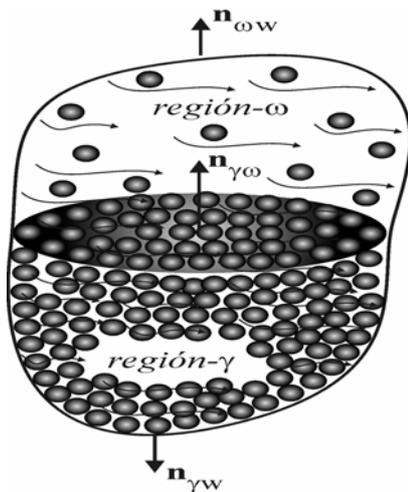


Fig. 3. Vectores Unitarios.

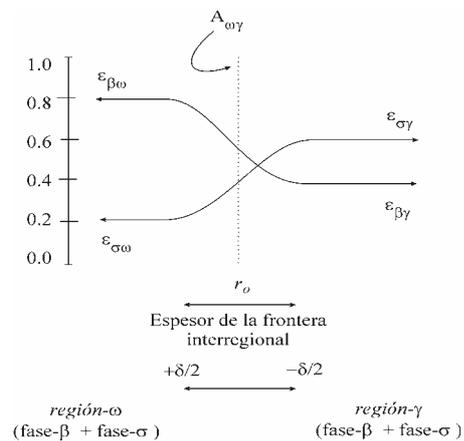


Fig. 4. Variación de las fracciones de volumen en la vecindad de la zona no homogénea.

Se hace notar que en la frontera interregional  $\omega - \gamma$ , las fracciones de volumen de líquido y recortes,  $\varepsilon_\beta$  y  $\varepsilon_\sigma$  respectivamente, presentan cambios significativos en una distancia igual al radio del volumen promedio  $r_o$ , tal como se ilustra en la Fig. 4. Existe el interés por usar las Ecs. (1) y (2) dentro de la región de la frontera interregional  $\delta$  ilustrada en Fig. 1, pero las cantidades tales como  $\{v\}_\omega$  y  $\{p\}_\omega$  no pueden predecir exactamente las presiones y velocidades superficiales. La Fig. 5 muestra la continuidad de la velocidad promedio espacial global. Los errores generados por el uso de las Ecs. (1) y (2) dentro de la región de la frontera interregional podrían ser corregidos por medio de una condición de salto la cual asegura que las Ecs. (1) y (2) son satisfechas en promedio. Formulación unidimensional en régimen transitorio. La formulación unidimensional en régimen transitorio del modelo promedio de dos regiones separadas para el flujo horizontal con un lecho móvil de recortes, se compone por

el siguiente conjunto de ecuaciones (Salazar-Mendoza, 2004):

Región- $\omega$

$$\frac{\partial}{\partial z} \{v_z\}_\omega = 0 \quad (15)$$

$$\{\rho\}_\omega \frac{\partial}{\partial t} \{v_z\}_\omega + \frac{d}{dz} \{p_z\}_\omega = -\frac{\{\tau_{yz}\}_{\omega w}}{D_{H\omega}} - \frac{\{\tau_{yz}\}_{\omega \gamma}}{D_{H\omega \gamma}} \quad (16)$$

Región- $\gamma$

$$\frac{\partial}{\partial z} \{v_z\}_\gamma = 0 \quad (17)$$

$$\{\rho\}_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \{v_z\}_\gamma + \frac{d}{dz} \{p_z\}_\gamma = -\frac{\{\tau_{yz}\}_{\gamma w}}{D_{H\gamma}} + \frac{\{\tau_{yz}\}_{\omega \gamma}}{D_{H\gamma \omega}} \quad (18)$$

Este modelo se obtuvo al realizar el producto punto de los vectores de las Ecs. (5) a (8) con el vector unitario  $e_z$  en la dirección de la coordenada axial  $z$  de un sistema de coordenadas cilíndricas. Las condiciones iniciales (C.I.) y las condiciones de frontera (C.F.) son:

$$\text{C.I.1} \quad \{v_z\}_\omega (z, t = 0) = e(z) \quad (19)$$

$$\text{C.I.2} \quad \{v_z\}_\gamma (z, t = 0) = f(z) \quad (20)$$

$$\text{C.F.1} \quad \{v_z\}_\omega (z, t) = g(z, t) \quad (21)$$

$$\text{C.F.2} \quad \{p_z\}_\omega (z, t) = h(z, t) \quad (22)$$

$$\text{C.F.3} \quad \{p_z\}_\gamma (z, t) = i(z, t) \quad (23)$$

$$\text{C.F.4} \quad \{v_z\}_\gamma (z, t) = j(z, t) \quad (24)$$

$$\text{C.F.5} \quad \{v\}_\omega = 0 \quad \text{en } y = h \quad (25)$$

$$\text{C.F.6} \quad \{v_z\}_\gamma = 0 \quad \text{en } y = -H_\gamma \quad (26)$$

$$\text{C.F.7} \quad \{v\}_\omega = \{v_z\}_\gamma \quad \text{en } A_{\omega \gamma} \quad (27)$$

$$\text{C.F.8} \quad \{p\}_\omega = \{p\}_\gamma \quad \text{en } A_{\omega \gamma} \quad (28)$$

Los esfuerzos de pared e interregional se expresan como (Doron y col., 1987; Doron y Barnea, 1993):

$$\{\tau_{yz}\}_{\omega\omega} = \frac{1}{2} f_{\omega} \{\rho\}_{\omega} (\{v_z\}_{\omega})^2 \quad (29)$$

$$\{\tau_{yz}\}_{\gamma\gamma} = \frac{1}{2} f_{\gamma} \{\rho\}_{\gamma} (\{v_z\}_{\gamma})^2 \quad (30)$$

$$\{\tau_{yz}\}_{\omega\gamma} = \frac{1}{2} f_{\omega\gamma} \{\rho\}_{\omega} (\{v_z\}_{\omega} - \{v_z\}_{\gamma})^2 \quad (31)$$

Los factores de fricción se evalúan de acuerdo con Doron y col. (1987):

$$f_{\omega} = \alpha \text{Re}_{\omega}^{-\zeta} \quad f_{\eta} = \alpha \text{Re}_{\eta}^{-\zeta} \quad (32)$$

donde los coeficientes para flujo turbulento son:  $\alpha = 0.046$ ;  $\zeta = 0.2$  y para flujo laminar son:  $\alpha = 16$ ;  $\zeta = 1$ .

El factor de fricción interregional,  $f_{\omega\gamma}$ , se evalúa con la fórmula modificada de Colebrook (Televantos y col., 1979):

$$\frac{1}{\sqrt{2f_{\omega\gamma}}} = -0.86 \ln \left( \frac{d_p}{D_{H\omega}} + \frac{2.51}{\text{Re}_{\omega} \sqrt{2f_{\omega\gamma}}} \right) \quad (33)$$

El número de Reynolds se define como:

$$\text{Re}_{\omega} = \frac{\{\rho\}_{\omega} \{v_z\}_{\omega} D_{H\omega}}{\{\mu\}_{\omega}} \quad (34)$$

$$\text{Re}_{\gamma} = \frac{\{\rho\}_{\gamma} \{v_z\}_{\gamma} D_{H\gamma}}{\{\mu\}_{\gamma}} \quad (35)$$

donde las densidades se relacionan mediante las siguientes expresiones:

$$\{\rho\}_{\omega} = \varepsilon_{\sigma\omega} \rho_{\sigma\omega} + \varepsilon_{\beta\omega} \rho_{\beta\omega} \quad (36)$$

$$\{\rho\}_{\gamma} = \varepsilon_{\sigma\gamma} \rho_{\sigma\gamma} + \varepsilon_{\beta\gamma} \rho_{\beta\gamma} \quad (37)$$

Las viscosidades de mezcla en las regiones se calculan de acuerdo con Ishii y Mishima (1984):

$$\{\mu\}_{\omega} = \mu_{\beta\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\sigma\omega}}{0.65}\right)^{-1.625} \quad (38)$$

$$\{\mu\}_{\gamma} = \mu_{\beta\gamma} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\sigma\gamma}}{0.65}\right)^{-1.625} \quad (39)$$

La fracción de volumen de recortes total es:

$$\varepsilon_{\sigma} = 1 - \varepsilon_{\beta} = \varepsilon_{\sigma\omega} + \varepsilon_{\sigma\gamma} \quad (40)$$

mientras que la fracción de volumen de líquido total es:

$$\varepsilon_{\beta} = 1 - \varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\beta\omega} + \varepsilon_{\beta\gamma} \quad (41)$$

Es común encontrar que el máximo empaquetamiento es  $\varepsilon_{\sigma\eta} = 0.52$ , porque se supone que las partículas son esféricas y se acomodan en un empaque cúbico. Sin embargo en este trabajo se introduce la definición de esfericidad de partículas con un valor de 0.8, para considerar otras formas de partículas, lo que permite asumir que el máximo empaquetamiento es  $\varepsilon_{\sigma\eta} = 0.65$ . Este último valor se utiliza en las fórmulas de la Ecs. (38) y (39), para calcular las viscosidades de mezcla.

La fracción de volumen de recortes en la región superior  $\varepsilon_{\sigma\omega}$  en este trabajo se determino como:

$$\varepsilon_{\sigma\omega} = (\varepsilon_{\sigma} - \varepsilon_{\sigma\gamma} \varepsilon_{\gamma}) / \varepsilon_{\omega} \quad (42)$$

donde las fracciones de volumen de las regiones se definen como:

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{V_{\omega}}{V}, \quad \varepsilon_{\gamma} = \frac{V_{\gamma}}{V} \quad (43)$$

El diámetro hidráulico, para cada región  $\omega$  y  $\gamma$ , se calcula con:

$$D_{H\omega} = \frac{4A_{\omega}}{S_{\omega} + S_{\omega\gamma}} \quad (44)$$

$$D_{H\gamma} = \frac{4A_{\gamma}}{S_{\gamma} + S_{\gamma\omega}} \quad (45)$$

Los diámetros hidráulicos interregionales son:

$$D_{H\omega\gamma} = \frac{4A_\omega}{S_{\omega\gamma}} \quad \text{para la región } \omega \quad (46)$$

$$D_{H\gamma\omega} = \frac{4A_\gamma}{S_{\gamma\omega}} \quad \text{para la región } \gamma \quad (47)$$

donde  $A_\omega$  es el área que ocupa la región  $\omega$ ,  $A_\gamma$  es el área que ocupa la región  $\gamma$ ,  $S_\omega$  es el perímetro mojado de la región  $\omega$ ,  $S_\gamma$  es el perímetro mojado de la región  $\gamma$ ,  $S_{\omega\gamma}$  ( $=S_{\gamma\omega}$ ) son los perímetros mojados interregionales. Los parámetros geométricos se calculan como sigue: 1) área total,  $A = \pi r_a^2$ , donde  $r_a$  es el radio de la tubería, 2) perímetro mojado total,  $S = 2\pi r_a$  y 3) diámetro hidráulico total,  $D_H = 2r_a$ . Para ángulos  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  donde  $\theta$  es el ángulo de contacto del lecho estacionario con la tubería (Fig. 6) es necesario calcular: 1) el área de la región superior,  $A_\omega = A - A_\gamma$ , 2) el área de la región inferior,  $A_\gamma = r_a^2(\theta - \text{sen}\theta \cos\theta)$ , 3) el perímetro mojado de la región superior,  $S_\omega = S - S_\gamma$ , 4) el perímetro mojado de la región inferior,  $S_\gamma = 2r_a\theta$ , 5) el perímetro mojado interregional,  $S_{\omega\gamma} = 2r_a \text{sen}\theta$ , y 6) la altura de la región inferior es  $H_\gamma = r_a(1 - \cos\theta)$ . Para ángulos  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ , se define: 1) el ángulo  $\alpha = 180 - \theta$ , 2) el área de la región inferior,  $A_\gamma = A - A_\omega$ , 3) el área de la región superior,  $A_\omega = r_a^2(\alpha - \text{sen}\alpha \cos\alpha)$ , 4) el perímetro mojado de la región inferior,  $S_\gamma = S - S_\omega$ , 5) el perímetro mojado de la región superior,  $S_\omega = 2r_a\alpha$ , 6) el perímetro mojado interregional,  $S_{\omega\gamma} = 2r_a \text{sen}\alpha$ , 7) la altura de la región superior,  $h = r_a(1 - \cos\alpha)$  y 8) la altura de la región inferior,  $H_\gamma = 2r_a - H_\omega$ .

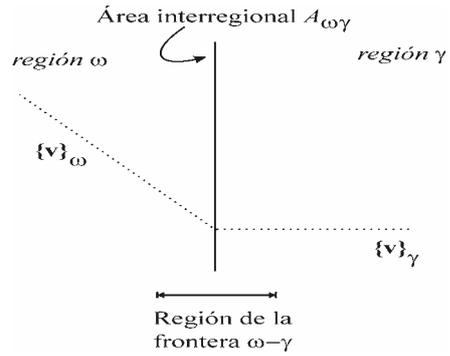


Fig. 5. Continuidad de la velocidad promedio espacial global.

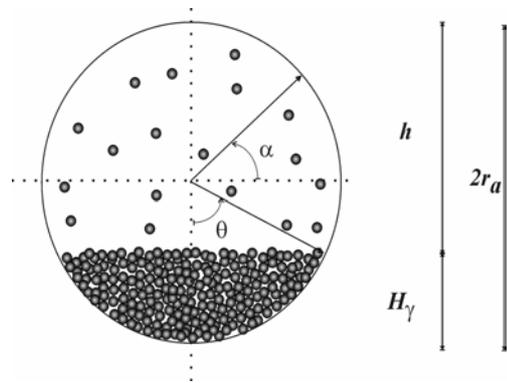


Fig. 6. Ángulos de contacto en un modelo de dos regiones.

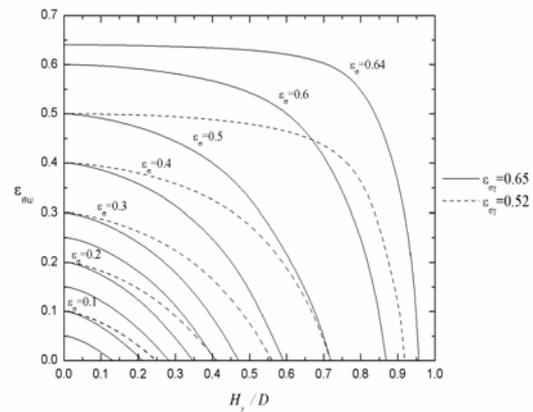


Fig. 7. Comportamiento de la fracción de volumen de recortes  $\epsilon_{\sigma\omega}$  en la región- $\omega$  como función de la fracción total de volumen de recortes  $\epsilon_\sigma$ , del empaquetamiento máximo  $\epsilon_{\sigma\gamma}$  en la región- $\gamma$  y la relación  $H_\gamma/D$  para el flujo con un lecho móvil.

### 3. Solución numérica

La forma discretizada de las Ecs. (15) a (18), la cual se obtuvo utilizando la técnica de diferencias finitas con un arreglo explícito hacia atrás, se puede escribir de manera matricial como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (48)$$

donde la matriz de coeficientes está definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta t} & \frac{1}{\{\rho\}_\omega \Delta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} & \frac{1}{\{\rho\}_\gamma \Delta z} \end{bmatrix} \quad (49)$$

el vector de variables dependientes es

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \{v_z\}_{\omega i}^{t+\Delta t} \\ \{p_z\}_{\omega i}^{t+\Delta t} \\ \{v_z\}_{\gamma i}^{t+\Delta t} \\ \{p_z\}_{\gamma i}^{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (50)$$

y el vector de términos independientes es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\{v_z\}_{\omega i}^t + \{p_z\}_{\omega i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\{v_z\}_{\omega i-1}^{t+\Delta t}}{\{\rho\}_\omega \Delta z} - \frac{f_\omega \{\rho\}_\omega (\{v_z\}_{\omega i}^t)^2}{2\{\rho\}_\omega D_{H\omega}} - \frac{f_{\omega\gamma} \{\rho\}_\omega (\{v_z\}_{\omega i}^t - \{v_z\}_{\gamma i}^t)^2}{2\{\rho\}_\omega D_{H\omega\gamma}} \\ \frac{\{v_z\}_{\gamma i}^t + \{p_z\}_{\gamma i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\{v_z\}_{\gamma i-1}^{t+\Delta t}}{\{\rho\}_\gamma \Delta z} - \frac{f_\gamma \{\rho\}_\gamma (\{v_z\}_{\gamma i}^t)^2}{2\{\rho\}_\gamma D_{H\gamma}} + \frac{f_{\omega\gamma} \{\rho\}_\omega (\{v_z\}_{\omega i}^t - \{v_z\}_{\gamma i}^t)^2}{2\{\rho\}_\gamma D_{H\gamma\omega}} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Para la solución numérica de la Ec. 48 se utilizó el paquete de computadora LINPACK (Dongarra y col., 1990), el cual es un código numérico para resolver ecuaciones lineales simultáneas. El algoritmo en el cual se basa este código consiste en factorizar la matriz **A** en una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior usando pivoteo parcial (es una versión de eliminación Gaussiana

con pivoteo parcial). Estos factores y la información del pivoteo se usan para encontrar la solución del vector **X**. Para realizar las simulaciones es necesario especificar las condiciones iniciales y de frontera, además de los parámetros físicos. El sistema físico simulado es una tubería horizontal de 4.135 m de longitud y 0.0508 m de diámetro. En la simulación se usa una malla de punto distribuido de 100x100 nodos.

### 4. Resultados y comparación con datos experimentales

El objetivo de las simulaciones numéricas es obtener los perfiles de presión y velocidad como función de la posición y el tiempo. El gradiente de presión adimensional en estado estable  $(\Delta P)^*$  (expresado en términos de metros de agua por metro de longitud de tubería, *m/m*) se calcula con la siguiente ecuación:

$$(\Delta P)^* = \left( \frac{(P_{ent} - P_{sal})/L}{\rho_{agua} g_r} \right) \quad (52)$$

donde  $P_{ent}$  es el dato de la presión de entrada,  $P_{sal}$  es el resultado calculado de la presión en la salida de la tubería de longitud *L*;  $\rho_{agua}$  es la densidad del agua, y  $g_r$  es la aceleración de la gravedad en la dirección radial. Para el caso del modelo promedio de dos regiones separadas se tiene:

$$(\Delta P)^* = \varepsilon_\omega (\Delta P)_\omega^* + \varepsilon_\gamma (\Delta P)_\gamma^* \quad (53)$$

Con la finalidad de evaluar el comportamiento de la fracción de volumen de recortes en la región superior,  $\varepsilon_{\sigma\omega}$ , como función de: la fracción de volumen de recortes total, del empaquetamiento máximo en la región

inferior y de la relación  $H/D$  (Fig. 7); en este trabajo se utilizó la Ec. 42. Al graficar la relación de la altura del lecho de recortes y el diámetro de tubería  $H/D$ , como función de la fracción de volumen de recortes total  $\varepsilon_\sigma$  y del empaquetamiento máximo en la región inferior  $\varepsilon_{\sigma\eta}$  (Fig. 8) se encontraron las transiciones de los patrones de flujo para un flujo bifásico sólido-líquido. Del análisis de la Fig. 8 se concluye que: a) el punto  $(0, 0)$  representa el flujo monofásico, b) el punto  $(\varepsilon_\sigma, 0)$  corresponde a un flujo de recortes completamente suspendidos, c) los puntos  $(0.52, 1)$  y  $(0.65, 1)$  corresponden a un flujo a través de un medio poroso, d) en los demás puntos se puede determinar si se tiene un flujo con lecho móvil y arriba de este una mezcla de recortes-líquido o solo líquido.

En la Fig. 9 se muestra el comportamiento del gradiente de presión adimensional en estado estable  $(\Delta P)^*$ , calculado para flujo con un lecho móvil de recortes como función de la velocidad promedio superficial  $\{v_z\}$  y la relación  $H/D$  de una tubería horizontal para una fracción de volumen de recortes  $\varepsilon_\sigma$  dada. El patrón de flujo con un lecho móvil de recortes es un patrón de flujo intermedio entre el patrón de flujo de recortes completamente suspendidos y el patrón de flujo con un lecho fijo de recortes. La transición a este tipo de flujo se ve influenciado por diversos parámetros, entre ellos la velocidad superficial, el diámetro de la tubería, las densidades del fluido y los recortes, el diámetro de los recortes, y la fracción de volumen de recortes.

La Fig. 10 muestra una comparación de los resultados del presente modelo con datos experimentales y correlaciones reportadas

en la literatura. Del análisis de la Fig. 10 se concluye que los datos simulados muestran una concordancia con el perfil de los datos medidos en el rango de velocidad de 1.0 a 1.6 m/s. Se calculó que la velocidad límite del patrón de flujo para este caso es 1.0 m/s y el error máximo entre los datos simulados y los medidos es de 6.8%.

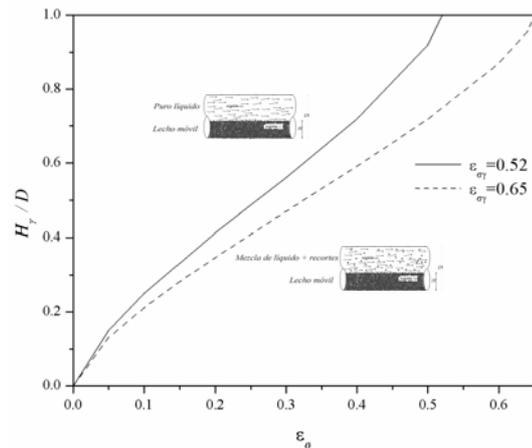


Fig. 8. Transiciones entre patrones de flujo como función de la fracción total de volumen de recortes  $\varepsilon_\sigma$  y del empaquetamiento máximo  $\varepsilon_{\sigma\gamma}$  en la *región-γ*.

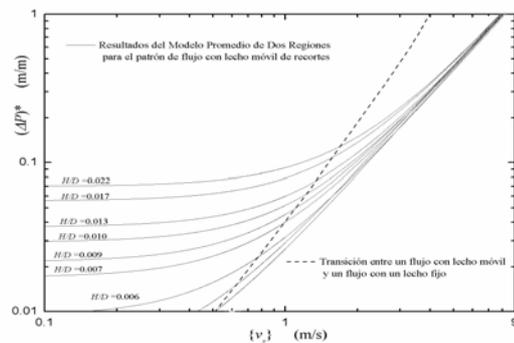


Fig. 9. Comportamiento del gradiente de presión adimensional en estado estable  $(\Delta P)^*$ , para un flujo con un lecho móvil de recortes, como función de la velocidad promedio superficial  $\{v_z\}$  y la relación  $H_\gamma/D$  de la altura del lecho y el diámetro de una tubería horizontal para una fracción total de volumen de recortes  $\varepsilon_\sigma$  dada.

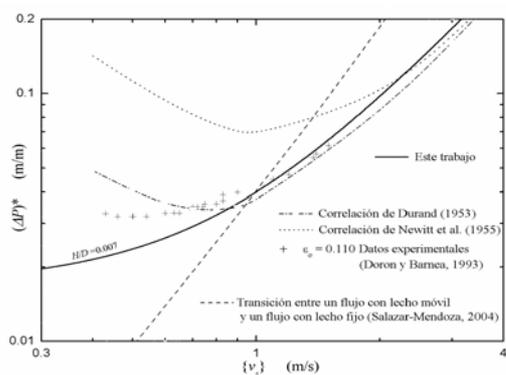


Fig. 10. Comparación de los resultados del modelo promedio de dos regiones para un flujo con un lecho móvil de recortes con correlaciones publicadas en la literatura y los datos experimentales de Doron y Barnea (1993) ( $\varepsilon_s = 0.110$ ,  $\rho_s = 1240 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $d_p = 3 \text{ mm}$ ,  $L = 4.135 \text{ m}$  y  $D = 50 \text{ mm}$ ).

## Conclusiones

A partir de modelos promedio de las regiones  $\omega$  y  $\gamma$ , se presentó la metodología para obtener el modelo promedio de dos regiones separadas para el flujo con un lecho móvil de recortes. Para poder acoplar los modelos promedio fue necesario que las regiones  $\omega$  y  $\gamma$  estuvieran representadas por un modelo equivalente, i.e. un modelo de una ecuación. El acoplamiento del modelo promedio de una ecuación para la región  $\omega$  y del modelo promedio de una ecuación para la región  $\gamma$  se realizó mediante la adición de términos de balance de fuerzas macroscópico de interacción entre regiones y pared (Doron y Barnea, 1993; Doron y col., 1987). Los errores generados por el uso de esta aproximación se pueden corregir por medio de una condición de salto, la cual asegure que el modelo es satisfecho en promedio dentro de la región de la frontera interregional  $\omega - \gamma$ . Por ello existe la necesidad de encontrar la

condición de salto interregional entre las regiones  $\omega$  y  $\gamma$  para el transporte de recortes de perforación. El propósito del modelo promedio de regiones separadas es predecir el comportamiento del gradiente de presión de un flujo con lecho móvil de recortes como función de varios parámetros: la velocidad superficial, la fracción del volumen total de recortes, la relación de la altura del lecho móvil y el diámetro en una tubería horizontal. Los resultados obtenidos muestran buena concordancia con los datos experimentales de Doron y Barnea (1993).

## Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), a la Secretaría de Educación Pública (SEP) y al Instituto Mexicano del Petróleo (IMP) por los apoyos económicos otorgados para el desarrollo de este trabajo (Conacyt-67148; SEP-G93027; IMP-13934)

## Bibliografía

- Babcock, H. A. (1971). Heterogeneous flow of heterogeneous solids. En *Advances in Solid Liquid Flow in Pipes and its Applications* (Ed I.Zandi), Pp 125-148. Pergamon Press, Oxford, Inglaterra
- Carbonell, R. G. y Whitaker, S. (1984). Heat and mass transport in porous media. En *Mechanics of Fluid in Porous Media*, (Eds. J. Bear y M. Y. Corapcioglu). Martinus Nijhoff, Bruselas, Bélgica
- Carleton, A. J., French, R. J., James, J. G. Broad, B. A. y Streat, M. (1978). Hydraulic transport of large particles using conventional and high concentration conveying. *Proceedings 5th International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*, D2, 15-28.

- Chhabra, R. P. y Richardson, J. F. (1983). Hydraulic transport of coarse gravel particles in a smooth horizontal pipe. *Chemical Engineering Research and Design* 61, 313-317.
- Cho, H., Shah, S. N. y Osisanya, S. O. (2000). A three-layer modeling for cuttings transport with coiled tubing horizontal drilling. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 63269.
- Cho H., Shah, S. N., y Osisanya, S. O. (2002). A three-segment hydraulic model for cuttings transport in coiled tubing horizontal and deviated drilling. *Journal of Canadian Petroleum Technology* 41(6), 32-39.
- Dongarra, J.J., Bunch, J.R., Moler, C.B. y Stewart, G.B. (1990). *LINPACK User Guide*. The Society for Industrial and Applied Mathematics
- Doron, P., Granica, D. y Barnea, D. (1987). Slurry flow in horizontal pipes-experimental and modeling. *International Journal of Multiphase Flow* 13 (4), 535-547.
- Doron, P. y Barnea, D. (1993). A three-layer model for solid-liquid flow in horizontal pipes. *International Journal of Multiphase Flow* 19 (6), 1029-1043.
- Doron, P. y Barnea, D. (1995). Pressure drop and limit deposit velocity for solid-liquid flow in pipes. *Chemical Engineering Science* 50 (10), 1595-1604.
- Doron, P. y Barnea, D. (1996). Flow pattern maps for solid-liquid flow in pipes. *International Journal of Multiphase Flow* 22 (2), 273-283.
- Doron, P., Simkhis, M. y Barnea, D. (1997). Flow of solid-liquid mixtures in inclined pipes. *International Journal of Multiphase Flow* 23 (2), 313-323.
- Durand, R. (1953). Basic relationships of the transportation of solids in pipes – experimental research. *Proceedings 5th International Hydraulics Convention* 89-103.
- Espinosa-Paredes, G., Cazarez-Candia, O., García-Gutiérrez, A. y Martínez-Méndez, J. (2002). Void propagation in a bubbly two-phase flow with expansion effects. *Annals of Nuclear Energy* 29, 1261-1298.
- Gavignet, A.A. and Sobey, I.J. (1989). Model aids cuttings transport prediction. *Journal of Petroleum Technology*, Septiembre, 916-921.
- Gillies, R. G., Shook, C. A. y Wilson, K. C. (1991). An improved two-layer model for horizontal slurry pipeline flow. *Canadian Journal of Chemical Engineering* 69, 173-178.
- Ishii, M. y Mishima, K. (1984). Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nuclear Engineering and Design* 82, 107-126.
- Kamp, A. M. y Rivero, M. (1999). Layer Modeling for Cuttings Transport in Highly Inclined Wellbores. *SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*, 53942.
- Kunii, D. y Levenspiel, O. (1991). *Fluidization Engineering*, 2<sup>a</sup> Ed. Butterworth-Heinemann Reed Publishing, Boston, EUA.
- Martins, A. L. y Santana, C. C. (1992). Evaluation of cutting transport in horizontal and near horizontal wells – A dimensionless approach. *SPE Latin American Petroleum Engineering Conference*, 23643.
- Newitt, D. M., Richardson, J. F., Abbott, M. y Turtle, R. B. (1955). Hydraulic conveying of solids in horizontal pipes. *Transactions Instrument Chemical Engineers* 33, 93-113.
- Nguyen, D. and Rahman, S. S. (1996). A three-layer hydraulic program for effective cuttings transport and hole cleaning in highly deviated and horizontal wells. *IADC/SPE Asia Pacific Drilling Technology*, 36383.
- Nguyen, D. y Rahman, S. S. (1998). A three-layer hydraulic program for effective cuttings transport and hole cleaning in highly deviated and horizontal wells. 182-189.
- Noda, K., Takahashi, H. y Kawashima, T. (1984). Relation between behavior of particles and pressure loss in horizontal pipes. En: *Proceedings 9th*

- International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes D4*, 191-205.
- Ramadan, A., Skalle, P., Johansen, S.T., Svein, J. y Saasen, A. (2001). Mechanistic model for cuttings removal from solid bed in inclined channels. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 30, 129-141.
- Salazar-Mendoza, R. (2004). Modelo hidrodinámico para el estudio del transporte de recortes de perforación en la sección horizontal de pozos petroleros. *Tesis de Doctorado*. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México.
- Salazar-Mendoza, R., Espinosa-Paredes, G., García, A., Cazarez-Candia, O., Díaz, A., y Vazquez, A. (2004). Averaging model for cuttings transport in horizontal drilling. *GRC Transactions* 28, 169-175.
- Televantos, Y., Shook, C., Carleton, A. y Streat, M. (1979). Flow of slurries of coarse particles at high solids concentrations. *Canadian Journal of Chemical Engineering* 57, 255-262.
- Turian, R. M. y Yuan, T. F. (1977). Flow of slurries in pipelines. *AIChE Journal* 23, 232-243.
- Wallis, G. B., (1969). *One-Dimensional Two-Phase Flow*. McGraw-Hill, Inc., Nueva York, EUA.
- Whitaker, S. (1999). *The Method of Volume Averaging*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda.
- Wilson, K. C. (1976). A unified physically-based analysis of solid-liquid pipeline flow. *Proceedings 4th International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*, A1, 1-16.
- Wilson, K. C. (1988). Evaluation of interfacial friction for pipeline transport models. *Proceedings 11th Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*, 107-116.
- Zandi, I. y Govatos, G. (1967). Heterogeneous flow of solid in pipelines. *Proceedings American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Division* 93 (HY3), 145-159.
- Zanotti, F. y Carbonell, R.G. (1984). Development of transport equations for multiphase systems I: Generalized development for two-phase systems. *Chemical Engineering Science* 39, 263-278.